Prof. Dr. Patrick Dondl
Dr. Martin Jesenko

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik

Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens

im Sommersemester 2019

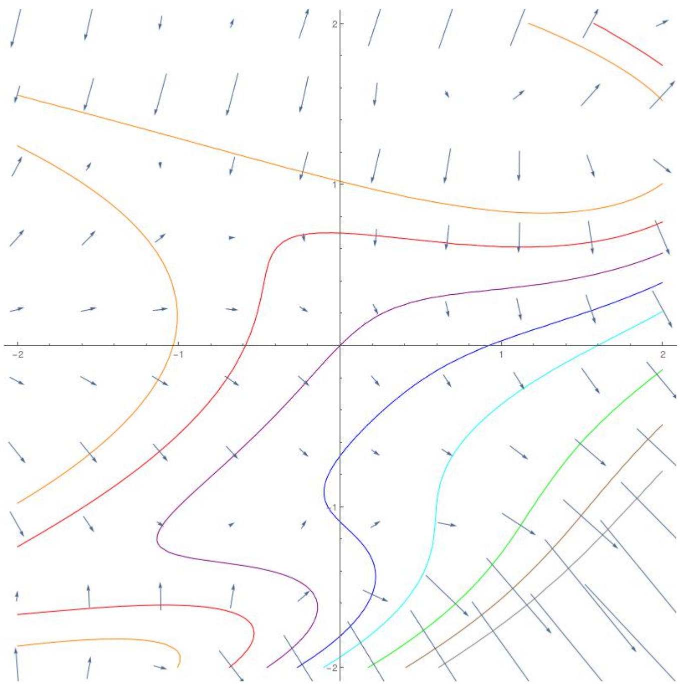
Übungsblatt 9

Wir haben nun den Begriff der Differenzierbarkeit zu den skalar- und vektorwertigen Funktionen mehrerer Variablen erweitert. Mit Hilfe der bereits bekannten Ableitung in Dimension 1 haben wir die Richtungsableitungen definiert. Handelt es sich um die Richtungen der Standardbasisvektoren, so bekommt man die partiellen Ableitungen. Die Jacobimatrix, die aus allen partiellen Ableitungen besteht, liefert die beste lineare Approximation der Funktion um den gegegenen Punkt.

Für eine Skizze der Funktionenwerte würde man mehr als zwei Dimensionen benötigen. Eine Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kann man aber mit deren Niveaulinien darstellen. Auf dem Bild sind so die Niveaumengen zu -1, $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 3 und 4 der Funktion

$$f(x, y) = 2^{x-y} + \cos(x + y^2) - 2$$

zu sehen. Ist die Funktion vektorwertig, so zeichnen man in dem Punkt den entsprechenden Vektor. So ist auf dem Bild der Gradient von f abgebildet. Wie in der Vorlesung gezeigt wurde, steht er senkrecht auf die Niveaumengen und bestimmt die Richtung des größten Wachstums.



Präsenzaufgaben

Diese Aufgaben sind nicht abzugeben und werden am 4. und 5. Juli in den Übungen besprochen.

1. Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) := x^2 + 4y^2.$$

(a) Zeichnen Sie drei (nichtleere) Niveaumengen von f.

(b) Berechnen Sie deren Gradienten und zeichnen Sie diesen wenigstens in einem Punkt auf jeder gezeichneten Niveaumenge.

Hausaufgaben

Die Hausaufgaben sind zu zweit in den richtigen Briefkasten zu „Mathematik II für Ingenieure“ (Erdgeschoss, Gebäude 051) abzugeben. Die Abgabefrist ist Dienstag, der 9. Juli 2019, um 12 Uhr. Schreiben Sie groß und deutlich auf die erste Seite Ihre Namen und Ihre Gruppe und heften Sie alle Blätter zusammen. Alle Aufgaben sind 4 Punkte wert und werden in den Übungsgruppen besprochen.

1. Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{2x^3y + y^2 - y^4}{3x^2 + 4y^2} \quad , & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass alle partiellen Ableitungen überall existieren.

2. Gegeben seien die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) := \arctan(xy), \qquad g(x,y) := \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

(a) Zeichnen Sie jeweils drei (nichtleere) Niveaumengen.

(b) Berechnen Sie deren Gradienten und zeichnen Sie sie wenigstens in einem Punkt auf jeder Niveaumenge.

3. Für $\alpha > 0$ sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(\boldsymbol{x}) := |\boldsymbol{x}|^\alpha$.

(a) Für welche $\alpha > 0$ existieren die partiellen Ableitungen $\partial_1 f, ..., \partial_n f$ in $\mathbf{0}$?

(b) Für welche $\alpha > 0$ sind sie in $\mathbf{0}$ stetig?

(c) Berechnen Sie für $n = 2$ und $\alpha = 3$ die Richtungsableitung von f im Punkt $\boldsymbol{x} = (-1,4)^T$ in Richtung $\boldsymbol{v} = (3,4)^T$.

4. Es sei

$$\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{f}(x,y) := \begin{pmatrix} \ln(x^2 + y^4 + 1) \\ y \sin(\pi(x^2 + y^2)) \\ e^{xy^2} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Jacobi-Matrix für beliebige x, y und an der Stelle $(x,y) = (2,1)$.